ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

LOUIS DE BROGLIE

Thermodynamique relativiste et mécanique ondulatoire

Annales de l'I. H. P., section A, tome 9, nº 2 (1968), p. 89-108
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1968__9_2_89_0>

© Gauthier-Villars, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. IX, n° 2, 1968, p. 89-108.

Section A :
Physique théorique.

Thermodynamique relativiste et mécanique ondulatoire

par

Louis de BROGLIE

INTRODUCTION

Notre but dans cet exposé est d'abord de montrer que, chaque fois que l'on peut dans un corps chaud séparer la chaleur interne du mouvement de translation d'ensemble, la formule de transformation relativiste de la chaleur de Planck-Laue $Q = Q_0\sqrt{1 - \beta^2}$ est exacte malgré les doutes qui ont été émis récemment à son sujet. Puis nous mettrons en évidence les liens profonds qui existent entre la formule $Q = Q_0\sqrt{1 - \beta^2}$ et les idées qui ont servi de point de départ pour la découverte de la mécanique ondulatoire et qui trouvent leur expression complète dans la théorie de la double solution et dans la thermodynamique cachée des particules [*1*] [*2*].

1. LE THÉORÈME D'EINSTEIN POUR UN CORPS EN ÉQUILIBRE CALORIFIQUE HOMOGÈNE

Nous commencerons par définir ce que nous appellerons un corps en équilibre calorifique homogène. Nous dirons qu'un corps formé d'éléments en mouvement est en équilibre calorifique homogène quand il existe pour ce corps un système de référence galiléen R_0 dans lequel : 1° le volume V_0 du corps est constant; 2° le volume V_0 du corps étant divisé en éléments de volume *égaux* $d\tau_0$, chacun de ces éléments de volume contient la même énergie w_0 et une quantité de mouvement *totale* nulle, $\vec{p}_0 = 0$. Pour un tel corps, on peut démontrer un théorème très important dû à Einstein

dont nous allons donner une démonstration abrégée. Considérons l'un des éléments de volume $d\tau_0$ contenant l'énergie w_0 et la quantité de mouvement $\vec{p}_0 = 0$. Passons à un système de référence galiléen R où le corps a un mouvement d'ensemble de vitesse $v = \beta c$. La formule de transformation relativiste de l'énergie $w = \dfrac{w_0 + \vec{v}\cdot\vec{p}_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ nous donne :

$$w = \frac{w_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1}$$

L'énergie d'ensemble du corps chaud est donc

$$\mathrm{W} = \sum_{d\tau_0} w = \frac{\mathrm{W}_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2}$$

W_0 étant l'énergie totale du corps dans son système propre R_0, et si nous posons par définition de M_0 la formule $\mathrm{W}_0 = \mathrm{M}_0 c^2$, nous avons

$$\mathrm{W} = \frac{\mathrm{M}_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3}$$

Tel est le résultat d'Einstein. Il montre qu'on peut attribuer à l'ensemble du corps chaud une masse propre M_0 telle que $\mathrm{M}_0 c^2$ contienne *d'une façon inséparable* l'énergie de masse propre de ses constituants et leur énergie calorifique globale. On peut considérer $\mathrm{M}_0 c^2$ comme la quantité de chaleur Q_0 contenue dans le corps dans son système propre R_0 et l'on est ainsi conduit à écrire

$$\mathrm{Q}_0 = \mathrm{M}_0 c^2 \qquad \mathrm{W} = \frac{\mathrm{Q}_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{4}$$

Les idées ainsi introduites par le raisonnement d'Einstein sont très importantes pour ce qui suit.

2. LA DYNAMIQUE DU CORPS A MASSE PROPRE VARIABLE

Nous allons maintenant considérer un petit corps quasi-ponctuel de dimensions extrêmement petites. Ce petit corps peut être, par exemple, une particule de l'échelle microphysique ou l'un des éléments de volume $d\tau_0$ d'un corps chaud dans son système propre.

Nous voulons étudier le mouvement de ce petit corps dans un système de référence galiléen R quand sa masse propre M_0 varie en fonction du temps t et de sa position dans R sans qu'il soit soumis à aucune force extérieure.

Pour établir les équations de la dynamique de ce corps à masse propre variable, nous partirons de l'expression relativiste de la fonction de Lagrange qui est, avec $v = \beta c$

$$\mathcal{L} = - M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} \tag{5}$$

Le principe de moindre action définit le mouvement du corps par la relation

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} - M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} dt = 0.$$

On sait que, de ce principe, résulte comme équations du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \qquad k = 1, 2, 3 \qquad \dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt} \tag{6}$$

ce qui nous donne aisément

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = - c^2 \sqrt{1-\beta^2}\, \overrightarrow{\text{grad}}\, M_0 \tag{7}$$

A cette formule, il faut adjoindre la suivante

$$\frac{dW}{dt} = c^2 \sqrt{1-\beta^2}\, \frac{\partial M_0}{\partial t} \tag{8}$$

qu'on déduit facilement de (7) en dérivant par rapport à t l'équation

$$\frac{W^2}{c^2} = p^2 + M_0^2 c^2.$$

On voit d'après (7) que tout se passe comme si le corps était soumis à une force intrinsèque résultant de la variation de la masse propre.

De (7) et de (8), on tire

$$\frac{dW}{dt} - \vec{v}\, \frac{d\vec{p}}{dt} = c^2 \sqrt{1-\beta^2}\, \frac{dM_0}{dt} \tag{9}$$

car $\frac{dM_0}{dt}$, variation de M_0 quand on suit le mouvement du petit corps, est égale à $\frac{\partial M_0}{\partial t} + \vec{v}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,M_0$. Mais on a

$$\frac{d\vec{p}.\vec{v}}{dt} = \vec{v}\,\frac{d\vec{p}}{dt} + M_0c^2\,\frac{\beta\frac{d\beta}{dt}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \vec{v}\,\frac{d\vec{p}}{dt} - M_0c^2\,\frac{d}{dt}\sqrt{1-\beta^2}$$

(10)

$$\frac{d}{dt}(M_0c^2\sqrt{1-\beta^2}) = c^2\sqrt{1-\beta^2}\,\frac{dM_0}{dt} + M_0c^2\,\frac{d}{dt}\sqrt{1-\beta^2}$$

de sorte que (9) peut s'écrire

$$\frac{d}{dt}[W - \vec{v}\cdot\vec{p} - M_0c^2\sqrt{1-\beta^2}] = 0 \tag{11}$$

Le crochet de (11) s'annulant quand le corps est au repos $v=0$, $W_0 = M_0c^2$, on doit avoir constamment

$$W = \frac{M_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = M_0c^2\sqrt{1-\beta^2} + \frac{M_0v^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{12}$$

formule dont la vérification est immédiate et que nous désignerons sous le nom de « formule de Planck-Laue ». Mais, comme le petit corps en mouvement peut, à chaque instant dans son système propre, être considéré comme en équilibre calorifique homogène, le théorème d'Einstein permet de lui attribuer une énergie calorifique interne $Q_0 = M_0c^2$ et d'écrire (12) sous la forme

$$\frac{Q_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = Q_0\sqrt{1-\beta^2} + \frac{Q_0\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{13}$$

Dans cette formule, le second terme du deuxième membre, qui croît avec la vitesse, peut être interprété comme l'énergie de translation globale du corps chaud tandis que le terme $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ peut être interprété comme la quantité de chaleur contenue dans le corps et transportée par lui. On retrouve bien ainsi la formule de transformation relativiste de la chaleur

$$Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2} \tag{14}$$

qui est certainement valable pour un petit corps quasi-ponctuel.

3. SIGNIFICATION RESPECTIVE DES GRANDEURS

$$\frac{M_0 v^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{et} \quad M_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$$

La formule (12) nous a conduit à considérer l'énergie de translation globale du petit corps à masse propre variable comme égale à $\frac{M_0 v^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ alors que dans la dynamique relativiste usuelle on définit l'énergie cinétique d'un corps de masse propre M_0 par $M_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$. Néanmoins cette dernière expression garde un sens physique très net.

Il est d'abord évident que, si le corps chaud en mouvement avec la vitesse βc s'immobilise en conservant la masse propre M_0, l'énergie disponible à l'extérieur sera bien $M_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$: c'est, dirons-nous, l'énergie « récupérable » à l'extérieur sous forme de travail et de chaleur. Si le corps s'immobilise en gardant une masse propre M_0' différente de M_0, on pourra écrire

$$(15) \qquad M_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right) = (M_0' c^2 - M_0 c^2) + \left(\frac{M_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - M_0' c^2\right)$$

La première parenthèse du second membre représente la variation positive ou négative de l'énergie interne du corps, tandis que la seconde parenthèse représente l'énergie qui est cédée à l'extérieur sous forme de travail ou de chaleur.

D'une façon générale, nous pouvons donc dire que, quand un corps C en translation avec la vitesse βc revient au repos, la grandeur

$$M_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$$

représente toujours la quantité d'énergie qui est « récupérable » à partir de l'énergie de translation du corps, soit sous forme d'augmentation de chaleur dans le corps C, soit sous forme de transmission d'énergie (énergie de mouvement ou chaleur) à l'extérieur du corps C. L'expression de l'énergie cinétique qui est classique en dynamique relativiste conserve donc un sens intéressant et précis.

4. SUR LA RELATION $dW = d\mathcal{T} + dQ$.

Revenons à la formule (9) de la dynamique du corps à masse propre variable. Si la vitesse $v = \beta c$ du corps dans le système de référence R reste constante, nous pouvons écrire

$$\frac{d}{dt}\left(W - \frac{M_0 v^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2}\right) = 0 \tag{16}$$

avec

$$E_t = \frac{M_0 v^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{et} \qquad Q = M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} = Q_0 \sqrt{1-\beta^2}.$$

Or, le travail fourni par la force $\vec{f} = -c^2\sqrt{1-\beta^2}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ M_0$ due à la variation de la masse propre est $d\mathcal{T} = \vec{f}.\vec{v}dt = \vec{v}.d\vec{p}$ pendant le temps dt et l'équation (16) peut s'écrire sous la forme

$$dW = d\mathcal{T} + dQ \tag{17}$$

Dans le système R, l'augmentation de l'énergie totale du corps est la somme de l'augmentation de sa chaleur interne et du travail qu'il reçoit. Ainsi la formule (17) a une forme qui est familière en thermodynamique.

Supposons maintenant que dans le système R, la vitesse $v = \beta c$ du corps varie. La formule (9) conduit alors à la formule (11). *Mais*, comme le travail élémentaire de la force due à la variation de la vitesse reste égal à $d\mathcal{T} = \vec{v}.d\vec{p}$ et que l'on a toujours $Q = M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2}$, on ne retrouve plus la relation (17) valable pour v constant. L'augmentation de l'énergie de translation d'ensemble $d\,\dfrac{M_0 v^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ n'est plus égale à $d\mathcal{T}$, mais à

$$d\mathcal{T} + \vec{p}\cdot d\vec{v} = d\mathcal{T} - M_0 c^2 d\sqrt{1-\beta^2}.$$

Quand, à M_0 constant, β augmente (ou diminue), $d\sqrt{1-\beta^2}$ est négatif (ou positif), la chaleur interne Q diminue (ou augmente) de $M_0 c^2 d\sqrt{1-\beta^2}$, tandis que l'énergie de translation E_t augmente (ou diminue) de la même quantité. Ainsi, l'on voit que l'augmentation (ou la diminution) de la vitesse à masse propre constante a pour effet de transformer une partie de la chaleur interne Q en énergie de translation E_t (ou inversement).

Si l'on voulait conserver une relation de la forme classique (17), il faudrait écrire

$$dW = d\mathcal{E}' + dQ \tag{18}$$

avec

$$dE_t = d\mathcal{E}' = \vec{f}\cdot\vec{v}dt - M_0c^2 d\sqrt{1-\beta^2} \tag{19}$$

La variation de E_t résulterait donc du travail de la force $\vec{f}$ et de la diminution de la chaleur interne transformée en énergie de translation.

Il est intéressant de préciser ce qui se passe quand la vitesse v est petite devant c, ($\beta \ll 1$), car on doit alors évidemment pouvoir faire le raccord avec la dynamique newtonienne classique. On a

$$Q = M_0c^2\sqrt{1-\beta^2} \simeq M_0c^2 - \frac{1}{2}M_0v^2\ ; \quad E_t = \frac{M_0v^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq M_0v^2 \tag{20}$$

E_t est donc alors le double de l'énergie cinétique classique. Mais, quand le corps revient au repos en conservant la masse propre M_0, l'énergie de translation E_t sert, au moment de l'arrêt du corps, par moitié à lui fournir un supplément de chaleur interne $\frac{1}{2}M_0v^2$ et par moitié à l'extérieur l'énergie $\frac{1}{2}M_0v^2$ qui est l'énergie « récupérable » égale à l'énergie cinétique classique, résultat intéressant et conforme à ce que l'on devait attendre.

5. CAS DU CORPS ÉTENDU A VOLUME PROPRE CONSTANT

Nous allons considérer maintenant le cas d'un corps dont le volume dans son système propre R_0 reste constant (absence de compression ou de décompression), mais qui est traversé par un flux de chaleur. Alors les éléments de volume $d\tau_0$ du corps contiennent une quantité de chaleur $q_0(t_0, x_0, y_0, z_0)$ et si nous envisageons le corps dans un système de référence R où il est animé de la vitesse d'ensemble $v = \beta c$, nous pourrons considérer chacun des éléments de volume $d\tau_0$ comme un petit corps quasi-ponctuel du type étudié plus haut et lui appliquer la dynamique du corps

à masse propre variable développée au paragraphe 2. Nous obtiendrons alors la formule analogue à (13).

$$(21)\quad \frac{q_0(t_0, x_0, y_0, z_0)}{\sqrt{1-\beta^2}} = q_0(t_0, x_0, y_0, z_0)\sqrt{1-\beta^2} + \frac{q_0(t_0, x_0, y_0, z_0)\beta^2}{\sqrt{1-s^2}}$$

Dans le système R_0 à chaque instant t_0 du temps propre, la quantité totale de chaleur contenue dans le corps est

$$Q_0(t_0) = \int_{v_0} q_0 d\tau_0.$$

En intégrant sur $d\tau_0$ la formule (21) où β est constant, nous obtenons

$$(22)\qquad \frac{Q_0(t_0)}{\sqrt{1-\beta^2}} = Q_0(t_0)\sqrt{1-\beta^2} + \frac{Q_0\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Mais dans cette formule, $Q_0(t_0)$ est la somme de quantités de chaleur qui sont simultanées dans R_0, mais qui ne le sont pas dans R. Cela fait que l'on ne peut plus ici considérer le terme $Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ comme la quantité de chaleur qui est transportée par le corps dans R à l'instant t. Autrement dit, il n'est plus possible de séparer la chaleur interne du mouvement de translation d'ensemble.

Mais supposons que le corps à un instant t_0 dans son système propre se soit trouvé dans un état d'équilibre homogène initial, alors il contient la chaleur propre totale $Q_{0i} = \int_{v_0} q_{0i} d\tau_0$. Si ensuite, après avoir été traversé par un flux de chaleur, le corps revient dans un état d'équilibre homogène, on aura $Q_0 = \int_{v_0} q_0 d\tau_0$ et, comme l'équation (21) a été constamment valable entre l'état initial et l'état final, on aura de nouveau dans l'état final la relation de Planck et Laue.

$$(23)\qquad \frac{Q_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = Q_0\sqrt{1-\beta^2} + \frac{Q_0\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

que l'on pourra aussi écrire d'après le théorème d'Einstein

$$(24)\qquad W = \frac{M_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = M_0c^2\sqrt{1-\beta^2} + \frac{M_0v^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

On voit ainsi que chaque fois que le corps étendu se trouvera dans un

état d'équilibre calorifique homogène, son énergie totale W se divisera en une énergie $Q_0\sqrt{1-\beta^2} = M_0c^2\sqrt{1-\beta^2}$ qui est l'énergie de chaleur que le corps transporte à son intérieur dans son mouvement dans R et une énergie de translation globale dans R égale à $\frac{Q_0\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{M_0v^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Autrement dit, tous les résultats obtenus dans les paragraphes 2, 3 et 4 pour un corps quasi-ponctuel se généralisent au cas d'un corps étendu se trouvant dans l'état d'équilibre calorifique homogène défini au paragraphe 1 (Voir [*3*]).

6. CONCLUSION SUR CE QUI PRÉCÈDE

En résumé, la formule de transformation de la chaleur $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ est toujours valable pour un corps quasi-ponctuel de dimensions extrêmement petites (particule) et pour un corps étendu en état d'équilibre calorifique homogène (1). On peut alors définir avec précision dans le système de référence R où le corps a la vitesse constante βc la quantité de chaleur $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ qu'il transporte dans son intérieur et l'énergie de mouvement de translation d'ensemble $\frac{M_0v^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ et on peut leur appliquer les remarques faites aux paragraphes 3 et 4.

Mais, pendant les états transitoires où un corps étendu est le siège d'un flux de chaleur (et également dans les cas où il y a une variation du volume V_0 avec flux de compression) une séparation nette entre la chaleur transportée et l'énergie de translation d'ensemble devient impossible et, comme ces cas sont très importants dans toutes les applications de la thermodynamique usuelle, c'est là, me semble-t-il, l'origine des discussions qui ont eu lieu entre savants qualifiés au sujet de la validité de la formule

$$Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2} \text{ (2)}$$

Cependant, celle-ci est toujours valable dès que le corps chaud est revenu dans un état d'équilibre homogène et toujours applicable à un corps quasi-ponctuel.

On doit d'ailleurs remarquer que la formule $Q = \frac{Q_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ défendue

(1) La formule de transformation de la chaleur $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ entraîne la formule de transformation de la température $T = T_0\sqrt{1-\beta^2}$ en raison de l'invariance de l'entropie.

(2) Voir à ce sujet la note complémentaire à la fin du présent article.

par divers auteurs est certainement inexacte. On peut le voir [4] en remarquant que, si β tend vers 1, la formule de transformation relativiste des vitesses montre que toutes les particules contenues dans le corps chaud tendent à devenir immobiles par rapport à l'ensemble du corps; la chaleur interne contenue dans le corps dans le système R, où il a la vitesse βc, tend donc vers zéro, la presque totalité de l'énergie des corps tendant à prendre la forme d'une énergie de translation d'ensemble comme cela se voit immédiatement sur les formules (23) et (24). La chaleur interne transportée par le corps tendant ainsi vers 0 quand β tend vers 1, la formule $Q = \frac{Q_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ n'est évidemment pas acceptable. On peut d'ailleurs aussi remarquer que, si la formule $Q = \frac{Q_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ était exacte, la chaleur interne transportée par le corps serait égale à son énergie totale, ce qui entraînerait la conséquence inacceptable que, dans le système de référence R où le corps est en mouvement avec la vitesse c, son énergie de translation d'ensemble E_t serait nulle.

7. LES ORIGINES DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

Quand j'ai eu, en 1923-1924, mes premières idées sur la mécanique ondulatoire [5], j'ai été guidé par le désir de faire une véritable synthèse physique valable pour toutes les particules de la coexistence des ondes et des particules découverte par Einstein pour les photons dans sa théorie des quanta de lumière (1905). Je ne mettais pas alors un instant en doute le caractère de réalité physique de l'onde et de la particule.

Une remarque m'avait beaucoup frappé. La phase d'une onde plane monochromatique écrite sous la forme

$$2\pi\left(\nu t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V}\right) = 2\pi\nu\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + yz}{\lambda}\right)$$

permet de définir un quadrivecteur « Onde » de composantes $\frac{\nu}{c}, \alpha\frac{\nu}{c}, \beta\frac{\nu}{c}, \gamma\frac{\nu}{c}$. Cela montre que la fréquence ν de l'onde se transforme comme une énergie par la formule $\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ alors que la fréquence d'une horloge se

transforme suivant la formule $\nu = \nu_0\sqrt{1-\beta^2}$ comme cela résulte de la théorie relativiste du ralentissement des horloges $\left(\beta = \frac{v}{c}\right)$.

J'avais alors remarqué que le quadrivecteur défini par le gradient d'espace-temps de la phase d'une onde plane monochromatique pouvait être mis en relation avec le quadrivecteur impulsion-énergie d'une particule en introduisant la constante h de Planck et en posant

$$\mathrm{W} = h\nu \quad ; \quad p = \frac{h}{\lambda} \tag{25}$$

pour relier l'énergie W à la fréquence ν et la quantité de mouvement p à la longueur d'onde λ. J'étais donc amené à imaginer que la particule, constamment localisée en un point de l'onde plane monochromatique, possédait cette énergie et cette quantité de mouvement et qu'elle décrivait l'un des rayons rectilignes de l'onde.

Mais, et ceci n'est jamais rappelé dans les exposés habituels de la mécanique ondulatoire, j'avais aussi remarqué que, si la particule est considérée comme contenant au repos une énergie interne $\mathrm{M}_0c^2 = h\nu_0$, il était naturel de l'assimiler à une petite horloge de fréquence propre ν_0 de sorte que, quand elle est en mouvement avec la vitesse $v = \beta c$, sa fréquence différente de celle de l'onde est $\nu_0\sqrt{1-\beta^2}$. J'avais alors facilement démontré qu'au cours de son mouvement dans l'onde, la particule avait une vibration interne qui restait constamment en phase avec celle de l'onde.

L'exposé fait dans ma Thèse avait l'inconvénient de ne s'appliquer qu'au cas particulier de l'onde plane monochromatique qui n'est jamais rigoureusement réalisée dans la nature en raison de l'existence inévitable d'une largeur spectrale. Je voyais bien que si une onde complexe est représentée par une intégrale de Fourier, c'est-à-dire par une superposition de composantes, ces composantes n'existent que dans l'esprit du théoricien et que, tant que ces composantes n'ont pas été séparées par un processus physique qui détruit la superposition initiale, c'est la superposition qui est la réalité physique. Je fus donc amené, peu de temps après ma thèse, à généraliser les idées qui m'avaient guidé dans ce travail d'une part en considérant le cas d'une onde qui n'est pas monochromatique plane et d'autre part en distinguant l'onde physique réelle de ma théorie de l'onde fictive Ψ à signification statistique et arbitrairement normée qu'à la suite des travaux d'Erwin Schrödinger et de Max Born on commençait à introduire systématiquement dans les exposés de la mécanique ondulatoire. C'est ainsi que mes réflexions m'ont amené à exposer dans un article du *Journal de Phy-*

sique de mai 1927 [*6*] sous le nom de « théorie de la double solution » une nouvelle interprétation de la mécanique ondulatoire et à généraliser pour le cas d'une onde quelconque la loi du mouvement de la particule que je n'avais jusqu'alors envisagée que dans le cas particulier de l'onde plane monochromatique.

8. LA THÉORIE DE LA DOUBLE SOLUTION ET LA LOI DU GUIDAGE

Je ne veux pas exposer ici en détail la théorie de la double solution et je me borne à renvoyer le lecteur aux exposés que j'ai publiés sur ce sujet depuis que, après les avoir longtemps abandonnées, j'ai repris les idées esquissées dans mon article de 1927 [*7*]. J'indiquerai seulement les deux idées principales sur lesquelles repose cette théorie.

a) L'onde étant, selon moi, une onde physique de très faible amplitude qui ne peut évidemment pas être arbitrairement normée, doit donc être distincte de l'onde Ψ normée à signification statistique du formalisme usuel de la mécanique quantique. Je désigne ici par v cette onde physique et je relie l'onde statistique Ψ à l'onde physique v par la relation $\Psi = Cv$ où C est un facteur de normalisation. C'est cette distinction, à mon avis essentielle, entre les deux solutions v et Ψ de l'équation des ondes qui m'avait fait donner à cette théorie le nom de théorie de la double solution. Pour une étude plus approfondie de cette question, je renvoie aux publications indiquées ci-dessus [*7*].

b) Pour moi, la particule toujours bien localisée dans l'espace au cours du temps constitue dans l'onde v une très petite région de haute concentration de l'énergie que l'on peut, en première approximation, assimiler à une sorte de singularité mobile. Des considérations qu'il serait trop long de reproduire ici conduisent à admettre que le mouvement de la particule doit être défini comme il suit. Si la solution complexe de l'équation des ondes qui représente l'onde v (ou, si l'on préfère, l'onde Ψ, ce qui revient au même, raison de la relation $\Psi = Cv$) est écrite sous la forme

$$v = a(x, y, z, t)e^{\frac{i}{\hbar}\varphi(x,y,z,t)} \qquad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi}\right) \tag{26}$$

où a et φ sont des fonctions réelles, l'énergie W et la quantité de mouve-

ment $\vec{p}$ de la particule quand elle occupe la position x, y, z, à l'instant t sont données par

$$\text{(27)} \qquad W = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,; \quad \vec{p} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$$

ce qui donne bien dans le cas de l'onde monochromatique plane où l'on a

$$\varphi = h\nu\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\lambda}\right)$$

les expressions (25) de W et de $\vec{p}$. Si dans les formules générales (27), on écrit W et $\vec{p}$ sous la forme

$$W = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{et} \qquad \vec{p} = \frac{M_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

on obtient

$$\text{(28)} \qquad \vec{v} = \frac{c^2 \vec{p}}{W} = -c^2 \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}}$$

On peut appeler cette formule qui détermine le mouvement de la particule la « formule de guidage ». Elle se généralise facilement quand la particule est soumise à un champ extérieur.

Introduisons maintenant l'idée, qui remonte, nous l'avons rappelé, aux origines de la mécanique ondulatoire, suivant laquelle la particule peut être assimilée à une petite horloge de fréquence propre $\nu_0 = \dfrac{M_0 c^2}{h}$ et attribuons-lui la vitesse définie par la formule (28). Pour un observateur qui voit passer la particule se déplaçant dans son onde à la vitesse βc, la fréquence interne de la petite horloge est $\nu = \nu_0\sqrt{1-\beta^2}$ d'après la formule de ralentissement des horloges en mouvement. Et cela permet de démontrer facilement que, même dans le cas général d'une onde qui n'est pas monochromatique plane, la vibration interne de la particule reste constamment en phase avec l'onde qui la porte. Ce résultat, qui contient comme cas particulier celui qui avait été primitivement obtenu dans le cas de l'onde plane monochromatique, peut être considéré comme le contenu essentiel de la loi du guidage.

La théorie montre alors facilement que la masse propre M_0 qui figure

dans les expressions de W et de $\vec{p}$ n'est pas en général égale à la masse propre m_0 usuellement attribuée à la particule. On la trouve égale à

$$M_0 = m_0 + \frac{q_0}{c^2} \tag{29}$$

où q_0 est dans le système propre de la particule une variation positive ou négative de sa masse propre. La grandeur q_0, qui est « le potentiel quantique » de la théorie de la double solution, a une valeur qui dépend de la forme de la fonction d'onde. Dans les documents [7] et [8], on trouvera l'expression de q_0 pour l'électron quand on emploie pour représenter son onde, soit l'équation relativiste de Klein-Gordon, soit l'équation non relativiste de Schrödinger, soit enfin les équations plus complètes de Dirac, et aussi pour le photon quand on emploie pour représenter l'onde électromagnétique les équations de Maxwell complétées par un très petit terme de masse propre.

9. ASSIMILATION DE L'ÉNERGIE PROPRE D'UNE PARTICULE A UNE CHALEUR CACHÉE

L'idée de considérer une particule comme une petite horloge, si on la compare aux conceptions de thermodynamique relativiste développées plus haut, conduit à penser que l'énergie interne de masse propre M_0c^2 d'une particule pourrait être assimilée à une chaleur cachée. En effet, une petite horloge contient dans son système propre une énergie d'agitation périodique interne qui ne s'accompagne d'aucune quantité de mouvement d'ensemble, ce qui est conforme à la définition que nous avons adoptée pour un corps contenant de la chaleur en équilibre homogène.

Si $Q_0 = M_0c^2$ est une énergie calorifique interne de la particule dans son système propre, la chaleur qu'elle transporte à son intérieur dans le système où elle est en mouvement avec la vitesse βc sera

$$Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2} = M_0c^2\sqrt{1-\beta^2} = h\nu_0\sqrt{1-\beta^2}.$$

La particule nous apparaît alors à la fois comme une petite horloge de fréquence $\nu = \nu_0\sqrt{1-\beta^2}$ et comme un petit réservoir de chaleur de contenu $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ en mouvement avec la vitesse βc. Et c'est l'identité de forme des formules de transformation relativiste pour la chaleur et pour la fréquence d'une horloge qui rend ce double aspect possible.

Quand la particule se déplace dans son onde suivant la loi du guidage, si l'onde n'est pas plane monochromatique, la masse propre M_0 varie d'une façon qui est donnée par la formule (29) quand on connaît la forme de l'onde. Le mouvement de la particule doit donc être réglé par la dynamique du corps à masse propre variable et, comme nous avons vu que cette dynamique est intimement reliée à la thermodynamique relativiste, nous pressentons que la théorie de la double solution va nous conduire à introduire des considérations de thermodynamique en mécanique ondulatoire. Nous préciserons cette idée dans les paragraphes suivants, mais nous allons dès maintenant montrer que la formule fondamentale (12) de la thermodynamique relativiste est en relation étroite avec le principe essentiel de la théorie du guidage.

Pour le voir, rappelons que si φ est la phase de l'onde écrite sous la forme $ae^{\frac{i}{\hbar}\varphi}$, la théorie du guidage nous dit que l'on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{M_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\,; \qquad -\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi = \frac{M_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{30}$$

D'autre part, la formule (12) de Planck-Laue peut s'écrire

$$M_0c^2\sqrt{1-\beta^2} = \frac{M_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \vec{v}\cdot\vec{p} \tag{31}$$

En portant (30) dans (31), nous obtenons

$$M_0c^2\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi = \frac{d\varphi}{dt} \tag{32}$$

Mais, si la particule est assimilable à une horloge de fréquence propre interne $\frac{M_0c^2}{h}$, la phase de sa vibration écrite sous la forme $a_1e^{\frac{i}{\hbar}\varphi_1}$ est

$$\varphi_1 = h\nu_0\sqrt{1-\beta^2}\,t = M_0c^2\sqrt{1-\beta^2}\,t$$

et l'on aura

$$d(\varphi_1 - \varphi) = 0 \tag{33}$$

d'où résulte que l'on a constamment $\varphi_1 = \varphi$. Il existe donc un lien étroit entre le principe de la théorie du guidage et la formule fondamentale (31) de la thermodynamique relativiste. Ce fait est d'autant plus remarquable

que la formule (31) résulte des travaux de Planck et Laue qui sont très antérieurs à l'apparition de la mécanique ondulatoire et de la théorie de la double solution.

10. LA THERMODYNAMIQUE CACHÉE DES PARTICULES

Après tout ce qui vient d'être dit, il paraît tout naturel de raisonner comme il suit. La dynamique relativiste nous apprend que la fonction de Lagrange d'une particule de masse propre M_0 en mouvement avec la vitesse βc est $\mathcal{L} = -M_0c^2\sqrt{1-\beta^2}$ et que l'intégrale d'action est

$$\int \mathcal{L}\, dt = -\int M_0c^2\sqrt{1-\beta^2}dt,$$

grandeur qui est invariante puisque

$$M_0c^2\sqrt{1-\beta^2}dt = M_0c^2dt_0,$$

dt_0 étant l'élément de temps propre de la particule. Il est donc tentant d'établir une relation entre les deux invariants fondamentaux que sont l'action et l'entropie, mais, pour pouvoir le faire, il faut donner à l'intégrale d'action une valeur bien définie en choisissant convenablement l'intervalle d'intégration dans le temps. Avec nos idées, il est alors naturel de choisir comme intervalle d'intégration la période T_i de la vibration interne de la particule de masse propre M_0 dans le système de référence où elle a la vitesse βc. Comme on a $\frac{1}{T_i} = \frac{m_0c^2}{h}\sqrt{1-\beta^2}$; on définit ainsi une intégrale « cyclique » d'action en remarquant que, la période T_i étant toujours très petite, on peut considérer que M_0 et β sont très sensiblement constants dans l'intervalle d'intégration et en posant

$$\frac{\mathcal{A}}{h} = -\int_0^{T_i} M_0c^2\sqrt{1-\beta^2}dt = -\frac{M_0c^2}{m_0c^2} \tag{34}$$

L'on est alors amené à définir l'entropie de l'état de la particule par

$$\frac{S}{k} = \frac{\mathcal{A}}{h} \tag{35}$$

où k et h sont respectivement la constante de Boltzmann et celle de Planck. On a alors, puisque $Q_0 = M_0c^2 - m_0c^2$

$$\delta S = - k \frac{\delta Q_0}{m_0c^2} \tag{36}$$

Nous sommes ainsi parvenus à attribuer au mouvement de la particule dans son onde une certaine entropie et, par suite, une certaine probabilité P donnée par la formule de Boltzmann écrite sous la forme $P = e^{\frac{S}{k}}$.

De ces idées, j'ai pu tirer deux résultats qui me paraissent très importants :

1° le principe de moindre action n'est qu'un cas particulier du second principe de la thermodynamique; 2° le privilège, dont Schrödinger avait souligné le caractère paradoxal, que la mécanique quantique actuelle attribue aux ondes monochromatiques planes et aux états stationnaires des systèmes quantifiés s'explique par le fait qu'ils correspondent aux maximums de l'entropie, les autres états étant non pas inexistants, mais seulement d'une bien moindre probabilité. Pour ces questions, je renvoie à mes publications [*1*] et [*2*] (Voir aussi [*9*]).

11. LE THERMOSTAT CACHÉ

La conception thermodynamique d'une particule que nous venons d'exposer conduit à penser qu'une particule, même quand elle nous paraît isolée de tout corps macroscopique susceptible de lui fournir de la chaleur, est cependant constamment en contact thermique avec une sorte de thermostat caché dans ce que nous appelons le vide.

Nous avons assimilé une particule à un corps contenant de la chaleur parce que nous la considérons comme un système contenant une énergie d'agitation interne sans quantité de mouvement d'ensemble. Mais, ce système étant très simple, il paraît difficile de lui attribuer une entropie et une température. Au contraire, le thermostat caché est, par définition, un système très complexe et l'on est amené à admettre qu'il fournit de la chaleur à la particule quand la masse propre de celle-ci augmente avec variation positive du potentiel quantique, $\delta q_0 = \delta M_0c^2$ et qu'il reprend de la chaleur à la particule quand la masse propre de celle-ci diminue avec variation négative du potentiel quantique. L'entropie définie par les formules (35) et (36) doit donc être l'entropie du thermostat caché et la quan-

tité δq_0 est à la fois dans le système propre de la particule la variation du potentiel quantique et la variation δQ_0 de la chaleur interne de la particule. On peut donc écrire dans le système où la particule a la vitesse βc :

$$\delta S = -\frac{\delta Q_0 \sqrt{1-\beta^2}}{T_0 \sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{\delta Q}{T} \tag{37}$$

le signe — s'expliquant par le fait que δQ est la chaleur *perdue* par le thermostat caché dont S est l'entropie. T_0 est définie par

$$T_0 = \frac{h\nu_0}{k} = \frac{m_0 c^2}{k} \tag{38}$$

On ne doit pas trop s'étonner de voir que la température que le thermostat paraît avoir pour la particule dépend de la masse propre m_0. En effet, c'est par l'intermédiaire de l'onde v dont la structure dépend de m_0 que la particule est en contact avec le thermostat caché.

Le grand progrès accompli autrefois en thermodynamique quand on y a introduit la structure moléculaire de la matière et la mécanique statistique a permis de comprendre que, lorsqu'un corps possède un état thermodynamique stable, il subit néanmoins constamment de petites fluctuations de moyenne nulle autour de cet état. On a ainsi pu développer la théorie de ces fluctuations et du mouvement brownien. Nous devons nous attendre à trouver des circonstances analogues dans l'interprétation du mouvement des particules par notre dynamique cachée.

Pour l'étude de ces questions, je renvoie encore à mes publications [*1*] et [*2*] et je me contenterai de rappeler le point suivant. J'ai montré [*1*] (p. 80 à 87) que, pour justifier, le fait bien établi que, du moins avec l'équation de Schrödinger, l'expression $|\Psi|^2 d\tau$ représente la probabilité de présence de la particule dans l'élément de volume $d\tau$ à l'instant t, il fallait admettre que la particule saute constamment d'une des trajectoires de guidage sur une autre. La trajectoire définie par la loi du guidage n'est donc qu'une trajectoire « moyenne »; elle ne serait réellement décrite que si la particule ne subissait pas de continuelles perturbations dues à des échanges de chaleur aléatoires avec le thermostat caché.

Une comparaison simple fera mieux comprendre cela. Considérons l'écoulement hydrodynamique d'un fluide. Un granule placé sur la surface du fluide se trouve entraîné par le mouvement d'ensemble de celui-ci. Si le granule est assez lourd pour ne pas subir sensiblement l'action des chocs individuels qu'il reçoit des molécules invisibles du fluide, il décrira l'une des lignes de courant de l'écoulement hydrodynamique. Si l'on assi-

mile le granule à une particule, l'ensemble des molécules du fluide est comparable au thermostat caché de notre théorie et la ligne de courant décrite par le granule est sa trajectoire de guidage. Mais, si le granule est suffisamment léger, son mouvement sera constamment perturbé par ses chocs individuels aléatoires avec les molécules du fluide. Il sera donc animé, en plus du mouvement régulier que tend à lui faire prendre le long d'une ligne de courant l'écoulement général du fluide, d'un mouvement brownien qui le fera constamment passer d'une ligne de courant sur une autre (Voir [*10*] (1)).

12. CONCLUSION GÉNÉRALE

Je pense que la réinterprétation de la mécanique ondulatoire à l'aide des images physiques précises dont je viens d'exposer les grandes lignes pourra conduire non seulement à retrouver les formalismes statistiques que l'on enseigne aujourd'hui sous les noms de mécanique quantique et de théorie quantique des champs, mais aussi de les rectifier sur certains points et sans doute d'aller plus loin qu'eux en interprétant ou en prévoyant des phénomènes qui leur échappent.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] *La Thermodynamique de la particule isolée* (ou Thermodynamique cachée des particules). Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[*2*] La Thermodynamique cachée des particules. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*. Vol. I, n° 1, 1964, p. 1-19; *C. R. Acad. Sci.*, t. **257**, 16 septembre 1963, p. 1822.

[*3*] *C. R. Acad. Sci.*, t. **253**, 19 décembre 1966, p. 1351.

[*4*] *C. R. Acad. Sci.*, t. **264**, série B, 10 avril 1967, p. 1041.

[*5*] *C. R. Acad. Sci.*, t. **177**, septembre-octobre 1923, p. 506, 548 et 630. Thèse de Doctorat, Masson, Paris, 1924. Rééditée en 1963.

[*6*] *Journal de Physique*, série 6, n° 5, mai 1927, p. 225.

[*7*] *Une interprétation causale et non linéaire de la Mécanique ondulatoire : la théorie de la double solution.* Gauthier-Villars, Paris, 1956.
La théorie de la Mesure en Mécanique ondulatoire. Gauthier-Villars, Paris, 1957.
Journal de Physique, t. **20**, décembre 1960, p. 963.
Étude critique des bases de la Mécanique ondulatoire. Gauthier-Villars, Paris, 1963.
Certitudes et incertitudes de la Science. Albin Michel, Paris, 1966.
C. R. Acad. Sci., t. **263**, 5 septembre 1966, p. 645.

[*8*] *Ondes électromagnétiques et photons.* Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[*9*] *Journal de Physique*, t. **28**, mai-juin 1967, p. 481.

[*10*] *C. R. Acad. Sci.*, t. **284**, 10 avril 1967, p. 1041.

(1) Un des points les plus importants de cet ensemble théorique est le suivant : le mouvement de la particule dans son onde est régi par une dynamique relativiste à masse propre variable.

Note complémentaire sur la thermodynamique relativiste.

Ainsi que je l'ai montré dans deux notes récentes (*C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **265**, 21 août 1967, p. 437, série B et t. **265**, 4 septembre 1967, p. 589, série B), l'une des raisons qui ont conduit à tort plusieurs auteurs à contester l'exactitude de la formule $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ est qu'ils ont admis qu'en thermodynamique relativiste, la pression est invariante, ce qui est inexact. M. Antonio Brotas qui poursuit des travaux très approfondis sur les états variables en thermodynamique relativiste est également arrivé à des conclusions qui paraissent en bon accord avec les miennes (voir *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **265**, 2 octobre 1967, p. 401, série B).

(Manuscrit reçu le 5 juin 1968).